**2. SİSTEMLERİN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ – Laplace Dönüşümü**

* 1. **Hedefler**

Bu bölümün hedefleri:

1. Kompleks değişkenlerin tanıtılması.
2. Laplace Transformasyonun tanıtılması.
3. Laplace Transformasyonu ile doğrusal adi diferansiyel denklemlerin çözümü.
   1. **Laplace Dönüşümü (Laplace Transformasyonu)**

Bir sistemden istenilen cevabın alınabilmesi için kontrol sistemi tasarımında ilk adım sistemin matematiksel bir modelinin oluşturulmasıdır. Fizik kurallarının (Newton yasası veya Kirchoff yasası) sistemlere uygulanmasıyla elde edilen modeller diferansiyel denklemler şeklindedir (Zaman alanı). Fakat doğrusal adi diferansiyel denklere Laplace transformasyonu uygulanarak sistemin Transfer fonksiyon modeli (Frekans alanı) elde edilebilir. Transfer fonksiyonu gösterimi ile diferansiyel denklem çözümüne gerek olmaksızın sistemin dinamik analizi yapılabilir.

Laplace transformasyonunun avantajları:

1. Laplace transformasyonu ile diferansiyel denklemler değişkeninde cebirsel denklemlere dönüştürülürler. Bu sayede basit cebirsel kuralların uygulanması ve alanından ters Laplace transformasyonu uygulanarak tekrar (zaman) alanına geçilmesi ile diferansiyel denklemlerin çözümü elde edilebilir.

2. Birçok temel fonksiyonun Laplace transformasyonunu önceden hazırlanmış tablolarda bulmak mümkündür. Böylece ekstra işlem yapmaya gerek kalmaz.

Doğrusal zaman-bağımsız sistemlerin analizinde Laplace transformasyonun getirdiği diğer avantajlar aşağıdaki gibi sıralanabilir:

3. Homojen denklem ve integral işlemi tek bir operasyon ile çözülür.

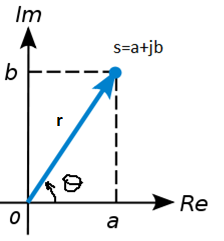
4. Çözüm başlangıç ve sınır değerleri direk olarak içerir.

5. Yapılan işlemler sistematiktir.

6. Sürekli olmayan girişler ile çalışılmasına olanak sağlar.

7. Sistemin Geçici ve Durağan durum çözümleri eş zamanlı olarak elde edilir.

8. Sistemin diferansiyel denklemini çözmeden grafiksel metotlarla sistem dinamiğinin analizinin yapılmasını sağlar.

Laplace Transformasyonun tanıtılmasından önce Kompleks sayılar hakkında kısa hatırlatma yapacağız.

**Kompleks Sayılar:**



a: Gerçek kısım

b: Imajinal kısım

j: Imajinal eleman (, Bazı kaynaklarda kullanılır.)

**Şekil. 2.1 Kompleks bir sayının grafiksel gösterimi**

**Kartezyen Koordinatlar:**

 **(Şekil 2.1)**

**Polar Koordinatlar:**

(Büyüklüğü)

(Açısı)

**Üssel gösterim:**

Şekil. 2.1.’den ve

 →

Euler teoreminden

,

Böylece,

ve periyodik olduğundan dolayı

, (

**Laplace Dönüşümünün tanımı:**

 : Zamana bağlı bir fonksiyon için

 : Kompleks bir değişken

 [ ] : Laplace Transform operatörü

 nin Laplace transformu:



Burada , kompleks bir değişkendir.

Laplace transformasyonu bir İntegral transformasyonudur ve doğrusal diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlerin analizinde birçok kolaylık sağlar. Bu kolaylıkların başlıcası Türev ve İntegral işlemlerini değişkeni ile çarpma ve bölme işlemine dönüştürür. Bu sayede diferansiyel ve integral denklemler çözümü kolayca yapılabilen cebirsel polinomlara dönüştürülür.

* 1. **Laplace Dönüşümünün Özellikleri ve Önemli Teoremler**

1. Sabit ile çarpım

1. Toplam ve Fark
2. Türev

Burada

1. İntegrasyon
2. Zamanda öteleme

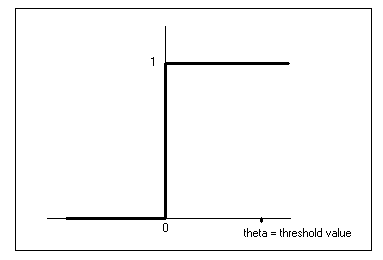
( basamak fonksiyonudur. )

1. Başlangıç-değer teoremi
2. Son-değer teoremi
   1. **Basit fonksiyonların Laplace Dönüşümleri**

Laplace transform metodunu kullanarak basamak, rampa, exponansiyel (üstel) ve sinüzoidal gibi yaygın fonksiyonlar kompleks değişkenin bir fonksiyonu olan cebirsel fonksiyonlara dönüştürülebilir.

**Örnek 1) Step fonksiyonu**

Çözüm: Basamak fonksiyonu için ve için olarak tanımlıdır.



****

**Örnek 2) Exponential fonksiyon**

****

* 1. **Ters Laplace Dönüşümü**

s bölgesinde (s domeninde) işlemler yapıldıktan sonra t bölgesine (t domenine) geri dönülmek istenir. ’ten ’nin elde edilmesine ters Laplace transformasyonu denir. fonksiyonuna aşağıdaki integral işlemi ile tanımlanan ters laplace dönüşümü uygulanarak  fonksiyonu elde edilir.



Burada reel (gerçek), sabit bir sayıdır ve ’in tanımsız yapan tüm değerlerin reel kısımlarından büyüktür. Yukarıdaki denklem s düzleminde değerlendirilen bir çizgisel integraldir ve çözümü bazı basit fonksiyonlar dışında zordur.

Çoğu zaman bir fonksiyonun ters Laplace transformunu bulmak için Laplace tablolarından faydalanabilir. Tablo 2.1. de bazı basit temel fonksiyonların Laplace transformları verilmiştir.

Tablo 2.1. Bazı fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

**-------------------------------------------------------------------------------------------------------------**

**Fonksiyon f(t) F(s)**

**-------------------------------------------------------------------------------------------------------------**

**Basamak (Step) A.u(t)** 

**Rampa (Ramp) A.t** 

Polinom (Polynomial) **tn** 

**Üstel (Exponential) e-at** 

**Sinüs (Sinusoidal) Sinwt** 

**Cosinüs (Cosinusoidal) Coswt** 

**Sönümlü Sinüs (Damped sine) e-at Sinwt** 

**Sönümlü Cosinüs (Damped cos) e-at Coswt**  **te-at** **tn e-at** 

* 1. **Kısmi Kesirlere Ayırma Yöntemi**

Sistemlerin transfer fonksiyonları s değişkeninin rasyonel fonksiyonu şeklindedir.



A(s) ve B(s) s değişkenine bağlı polinomlardır. Zaman cevabına geçmek için transfer fonksiyonunun ters Laplace transformu, Laplace transform tabloları kullanılarak kolayca elde edilebilir. Fakat bunun için transfer fonksiyonunun kısmı kesirlere ayırarak basit fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilmesi gereklidir.





Kontrol sistemlerinde A(s)’in mertebesi B(s)’in mertebesinden büyüktür, ( ) bu nedenle basit kesirlere ayırma yöntemi ile F(s) rasyonel fonksiyonu elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Bu sayede F(s) fonksiyonunu kolaylıkla entegre edilebilen daha basit kesirlerin toplamı şekline dönüştürmüş oluruz.

Rasyonel bir fonksiyon için kutuplar (poles) ve sıfırlar (zeros) kavramı çok önemlidir. Rasyonel bir fonksiyon kutupları ve sıfırları ile karakterize edilir. Bir sistemin kutupları ve sıfırları o sistemin kararlı olup olmadığını ve performansının ne kadar iyi olduğunu gösterir. Kontrol sistemleri tasarımı da sisteme yeni kutuplar ve sıfırlar atanarak yapılır.

F(s) fonksiyonunu sıfır yapan s değerlerine sistemin **sıfır**ları (zero) denir.

F(s) fonksiyonunu sonsuz yapan s değerlerine de sistemin **kutup**ları (pole) denir.

**Örnek:** Aşağıdaki fonksiyonun kutuplarını ve sıfırlarını bulunuz.



’de sistemin bir adet sıfırı vardır.

 sistemin kutuplarıdır. F(s) toplam 6 kutuba sahiptir, 2 si basit kutup. 2 si katlı kutup ve 1 çift kompleks eşlenik kutup vardır.

O halde kısmi kesirlere ayırmada kutupların türüne göre 3 hal mevcuttur. Aşağıda basit kesirlere ayırma yönteminin sistemin kutuplarının basit, kompleks, katlı olması durumlarına göre uygulanışı verilecektir.

**1) Basit Kutuplar hali**

****

 sabitlerdir. Bu sabitler

****

olarak hesaplanır. Tablo yardımıyla ters dönüşüm yapılarak



bulunur.

**2) Katlı Kutuplar hali**

****

****

****





**Örnek: (**Basit ve katlı kökler**)**

****

****

****







****





**2) Kompleks Eşlenik Kutuplar hali**

Örnek üzerinde izah edilecektir.

**Soru 1)** Başlangıç şartları verilen aşağıdaki problemi Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.



**Çözüm:**

































**Soru 2)** Başlangıç şartları verilen aşağıdaki problemi Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.



**Çözüm:**











****

















**Soru 3)** ** denklemini ters Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.**

**Çözüm:**

Sistem kompleks köklere sahipse bu durumda kompleks kökleri sönümlü sinüs veya cosinüs formuna getirmekte fayda vardır.





|  |
| --- |
| **Hatırlatma:** |

Bu duruma Laplace transform tablosundan karşılık gelen fonksiyonlar















**Soru 4)** Başlangıç şartları verilen aşağıdaki problemi Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.



**Çözüm:**

























** denklemini ters Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.**

**Çözüm Anahtarı**

****

****